

**GRANDEZZE E UNITA' DI MISURA**

**LA TEORIA DEGLI ERRORI**

AD USO DEI LABORATORI  
DI FISICA E DI CHIMICA

# IL SISTEMA INTERNAZIONALE

Il SI ( sistema internazionale delle unità di misura) fornisce dei parametri universalmente riconosciuti, e quindi comprensibili e confrontabili ovunque, riguardo i diversi tipi di grandezze e alle unità di misura utilizzate per esprimerle.

Tabella n.1

## Unità fondamentali nel SI

Grandezza fondamentale	Simbolo	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	<i>l</i>	metro	<i>m</i>
Massa	<i>m</i>	chilogrammo	<i>kg</i>
Tempo	<i>t</i>	secondo	<i>s</i>
intensità di corrente	<i>i</i>	ampere	<i>A</i>
temperatura termodinamica	<i>T</i>	kelvin	<i>K</i>
quantità di sostanza	<i>n</i>	mole	<i>mol</i>
intensità luminosa	<i>I<sub>v</sub></i>	candela	<i>cd</i>

Le altre grandezze a noi note, si dicono DERIVATE delle grandezze fondamentali. Per esempio, la velocità è derivata della lunghezza e del tempo:  $v = l / t$ ; la densità è derivata della massa e del volume, il quale è dato a sua volta dalla moltiplicazione di tre misure di lunghezza (pensate ad es. ad un cubo):

$$d = m / V \rightarrow d = m / l^3.$$

Va ricordato, infine, che in un'espressione le unità di misura seguono sempre la quantità che identificano, mentre le grandezze precedono l'uguale:  
 $m = 10 \text{ kg}$ .

Per i multipli e i sottomultipli delle unità di misura esistono specifici simboli e prefissi, riassunti nella **Tabella n.2**, che sono sempre validi, tranne per alcune eccezioni, come per i multipli del secondo.

Esiste, inoltre, una distinzione tra grandezze ESTENSIVE ed INTENSIVE: le prime esprimono un concetto di quantità ( volume, massa ...), le seconde sono invece legate alla natura e alle condizioni in cui si può trovare un corpo ( temperatura, pressione...).

Tabella n.2

## Prefissi SI

Prefisso	fattore	simbolo
esa	$10^{18}$	E
peta	$10^{15}$	P
tera	$10^{12}$	T
giga	$10^9$	G
mega	$10^6$	M
chilo	$10^3$	K
etto	$10^2$	h
deca	10	da
-----	1	-----
deci	$10^{-1}$	d
centi	$10^{-2}$	c
milli	$10^{-3}$	m
micro	$10^{-6}$	$\mu$
nano	$10^{-9}$	n
pico	$10^{-12}$	p
femto	$10^{-15}$	f
atto	$10^{-18}$	a

Note• Lunghezza

Esistono alcune particolari grandezze derivate da quella di lunghezza, quali:

**Area o Superficie** ( $A$ ) la cui unità di misura è il metro quadrato  $m^2$  ( $mq$ )

**Volume** ( $V$ ) la cui unità di misura è il metro cubo  $m^3$  ( $mc$ )  
 può essere espresso anche in litri  $1l = 10^{-3}m^3 = 10^3cm^3 = 10^3ml$

Inoltre:

$1 \times 10^{-6} m$  non è chiamato "micrometro" ma semplicemente *1 micron*:  $1\mu m$

$1 \times 10^{-10} m$  è chiamato ANGSTROM:  $1 \text{ \AA}$

• Massa

L'unità di misura della massa è il chilogrammo perciò bisogna modificare il fattore di moltiplicazione della tabella n.2. Quindi, ad es.

$$10^{-9} Kg = 1 \text{ microgrammo} \rightarrow 1\mu g$$

• Tempo

Per il tempo è valida solo la tabella dei sottomultipli.

Infatti i multipli sono: minuto, ora, giorno, settimana, mese, anno, lustro, decennio....secolo, millennio, era...

- Temperatura termodinamica

Per la temperatura è usata comunemente la scala centigrada o Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) mentre nel SI è usata quella Kelvin ( $\text{K}$ ).

La temperatura di  $0^{\circ}\text{C}$  corrisponde a  $273,16 \text{ K}$ , mentre l'ampiezza di un grado centigrado è uguale a quella di un grado Kelvin; cioè se la differenza fra due temperature espresse in  $^{\circ}\text{C}$  è di  $100^{\circ}\text{C}$ , anche la differenza fra le due temperature espresse in  $\text{K}$  sarà di  $100\text{K}$ .

Per passare da una scala all'altra ci si serve della seguente equazione

$$T_{(\text{K})} = T_{(^{\circ}\text{C})} + 273,16$$

Se la cosa non crea equivoci, la temperatura in gradi centigradi si esprime con la lettera  $t$  e quella in gradi Kelvin con la  $T$ , per cui l'equazione precedente si può più semplicemente esprimere così:

$$T = t + 273,16.$$

Piuttosto che il termine PESO, meglio utilizzare il termine MASSA, che è la quantità di materia misurata con una bilancia.

La QUANTITÀ DI SOSTANZA PURA dal punto di vista chimico ( $n$ ), ha come unità di misura la mole ( $\text{mol}$ ).

①

$$n (\text{mol}) = m (\text{g}) / M_m (\text{g/mol})$$

dove:  $n$  = quantità di sostanza e  $M_m$  = massa molare  
Da cui:

②

$$M_m = m(\text{g}) / n (\text{mol})$$

Dalla formula ② si vede che l'unità di misura della massa molare è  $\text{g/mol}$

Ad esempio,

se la massa atomica dell'idrogeno ( $\text{H}$ ) è 1,008 e quella dell'ossigeno ( $\text{O}$ ) è 15,999, allora la massa molecolare dell'acqua ( $\text{H}_2\text{O}$ ) è  $2 \cdot 1,008 + 15,999 = 18,015$

Quindi

18 ml di acqua, che ha  $d = 1 \text{ kg/l} = 1 \text{ g/ml}$  ha la massa uguale a 18 g.

Nel caso dell'esempio:

$$\frac{18(\text{g})}{18,015(\text{g/mol})} = 1,0(\text{mol})$$

# TEORIA DEGLI ERRORI

Ogni qualvolta dobbiamo effettuare una misurazione incorriamo inevitabilmente in un errore; questo errore varia a seconda del tipo di misurazione.

La misura rilevata può essere:

**DIRETTA** → il confronto diretto tra il campione di misura e l'oggetto da misurare ( come ad esempio la lunghezza misurata con la riga, la massa misurata con la bilancia, il tempo misurato con il cronometro, ecc.).

**INDIRETTA** → quando si devono attuare alcune operazioni ( aritmetiche come addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ecc. ) sulla misure dirette per determinare una data misura

Ad esempio per misurare la velocità, misuro lo spazio percorso ed il tempo impiegato per percorrerlo e poi divido la misura dello spazio per quella del tempo, oppure per misurare il perimetro di un poligono, misuro prima la lunghezza di ciascun lato e poi sommo tali misure.

Ogni misurazione è caratterizzata da **errori** dovuti a inevitabili difetti strumentali e umani. Questi possono essere:

- **errori SISTEMATICI** → aumentano sempre o diminuiscono sempre il valore della misura. Questi errori sono dovuti alla taratura dello strumento, oppure a qualche errore dell'operatore; per cercare di evitarli si devono esaminare attentamente le procedure operative e matematiche utilizzate per verificarne la validità.
- **Errori CASUALI** → come dice la parola stessa sono dovuti al caso, non si può sapere con esattezza come e quando si presenteranno e, a differenza degli errori sistematici, possono aumentare o diminuire la misura reale. Non esiste alcun modo per poterli evitare, ma è possibile effettuare un trattamento statistico (inventato da Gauss) ovvero fare più misurazioni dello stesso campione e calcolarne la media aritmetica; il valore così ottenuto sarà più vicino al valore reale.

Gli errori sulle misurazioni DIRETTE si possono classificare in:

- **ERRORE ASSOLUTO** – nella misura diretta corrisponde alla minima suddivisione della scala di misura dello strumento e si esprime con la stessa unità di misura della grandezza misurata.
- **ERRORE RELATIVO** – è un indice della precisione di una misura ed è dato dal rapporto tra l'errore assoluto associato alla misura e la misura stessa; dunque risulta essere il rapporto tra due grandezze omogenee ed è quindi adimensionale ( senza unità di misura). Serve sia per confrontare la precisione di misure relative a grandezze non omogenee sia per ottenere la precisione di grandezze calcolate con misura indiretta.
- **ERRORE PERCENTUALE** – si ottiene moltiplicando per cento l'errore relativo. E' anch'esso adimensionale ed ha lo stesso uso dell'errore relativo.

Per chiarire meglio il legame fra i vari tipi di errore ci serviamo di un esempio pratico:  
 supponiamo di versare  $18 \text{ ml} = 1 \text{ mol}$  d'acqua in un cilindro graduato da  $50 \text{ ml}$ .  
 Osservando attentamente possiamo notare che si forma una lente, o meglio, un menisco concavo, per cui il livello del liquido è più alto ai bordi che al centro, dato che le particelle sono attratte dalle pareti del cilindro.

Procediamo ora alla misurazione del volume del liquido contenuto nel cilindro, sapendo che quest'ultimo ha una risoluzione strumentale di  $1 \text{ ml}$ :

$$V = 18 \text{ ml} = \text{menisco inferiore} \pm 1 \text{ ml}$$

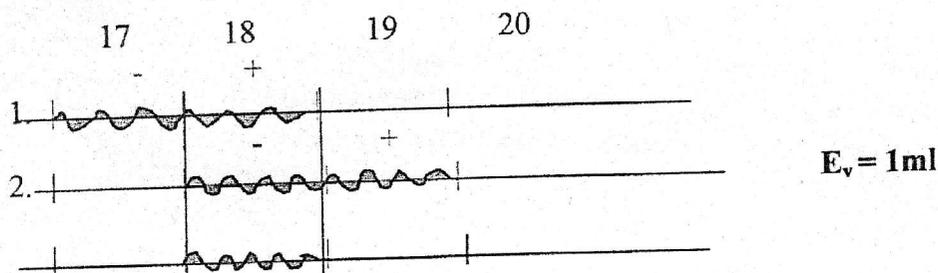
$$V = 19 \text{ ml} = \text{menisco superiore} \pm 1 \text{ ml}$$

$1 \text{ ml}$  è l'errore assoluto della misura  $X$  e si scrive  $\delta X$ .

Se ammettiamo che a ogni singola misura viene associato un errore assoluto, si può pensare che il valore di una misura varia entro un intervallo di ampiezza due volte l'errore assoluto: un estremo dell'intervallo è il valore minimo della misura ( $X_{min}$ ) e l'altro estremo è il valore massimo della misura ( $X_{max}$ ). Possiamo allora scrivere che l'errore assoluto è uguale a:

$$\delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}$$

E' indifferente considerare l'una o l'altra misurazione come si può vedere dal grafico :



Nel nostro caso, il cilindro ha risoluzione strumentale pari a  $1 \text{ ml}$ , la misura corretta sicuramente è compresa tra  $18 \text{ ml}$  e  $19 \text{ ml}$ .

Come detto sopra, dividendo l'errore assoluto per la misura effettuata si trova l'errore relativo.

$$Er = \frac{\delta X}{X} \quad \text{in questo caso} \quad Er(V) = \frac{1 \text{ ml}}{18 \text{ ml}} = \frac{E_V}{V} = 0,0555\dots$$

Come si può notare, solitamente l'errore relativo è un numero molto piccolo, meglio esprimerlo in notazione esponenziale o scientifica, arrotondando per eccesso a due cifre significative:  $5,6 \cdot 10^{-2}$

Moltiplicando per 100 l'errore relativo,  $Er(V) \cdot 10^2 = Er(V) \%$ , si ottiene l'errore percentuale:  $5,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 5,6\%$

## PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Nel caso di una misurazione indiretta ( che, come abbiamo già detto, si ottiene mediante un calcolo) si deve conoscere in che modo gli errori si propagano nelle operazioni.

### 1° REGOLA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

In caso di addizione o sottrazione l'errore assoluto sulla somma o sulla differenza è pari alla somma degli errori assoluti delle misure utilizzate.

### 2° REGOLA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

In caso di moltiplicazione o di divisione l'errore relativo (percentuale) sul prodotto o sul quoziente è pari alla somma degli errori relativi (percentuali) delle misure utilizzate.

Per esempio la densità è il rapporto tra massa e volume. Poiché queste due grandezze hanno unità di misura diverse ( $g/ml$ ), l'errore assoluto non si potrebbe sommare, perciò si usa l'errore relativo.

- Esempifichiamo ora il caso di un quoziente tra due misure dirette  $a \pm \delta a$  e  $b \pm \delta b$ . Sia  $d = a/b$  il quoziente delle misure  $a$  e  $b$  e sia  $\delta d$  l'errore assoluto sul quoziente; determiniamo  $\delta d$ :

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \qquad \delta d = \left( \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right) d$$

La misura sarà perciò data da  $d \pm \delta d$ .

- Chiariamo inoltre il caso di un prodotto tra due misure dirette  $a \pm \delta a$  e  $b \pm \delta b$ . Sia  $c = a \cdot b$  il prodotto delle misure  $a$  e  $b$  e sia  $\delta c$  l'errore assoluto sul prodotto; determiniamo  $\delta c$ :

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \qquad \delta c = \left( \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right) c$$

La misura sarà perciò data da  $c \pm \delta c$ .

### Esempio: Misura della densità

La **densità** di un oggetto è definita come il rapporto tra la massa  $m$  dell'oggetto ed il volume  $V$  dell'oggetto stesso.

La **massa** è misurata direttamente per mezzo della bilancia;

la misura del **volume** è effettuata immergendo completamente l'oggetto nell'acqua contenuta in un cilindro graduato, valutando lo spostamento subito dal livello del liquido.

La misura della densità è quindi ricavata in modo indiretto calcolando il rapporto tra le due misure.

Supponiamo di disporre dei seguenti dati:

$m$ (g)	$V$ (ml)	$\delta m/m$	$\delta V/V$
$16 \pm 1$	$5,5 \pm 0,5$	0,0625	0,0909

Utilizziamo per il nostro calcolo gli errori percentuali; quelli relativi alla massa e al volume saranno:

$$E_r(m)\% = 6,25\% \quad \text{e} \quad E_r(V)\% = 9,09\%.$$

Poiché si tratta di un quoziente, gli errori relativi (percentuali) si sommano:

$$E_r(d)\% = 6,25\% + 9,09\% = 15,34\%, \quad \text{che corrisponde ad un} \quad E_r(d) = 0,1534.$$

Calcoliamo la densità media dalle misure di massa e volume:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{16g}{5,5ml} = 2,9 \frac{g}{ml}$$

Poiché  $1l = 1 dm^3 \Rightarrow 1 ml = 1 cm^3$ .

Quindi la densità si può esprimere anche in  $g/cm^3$ ,  $d = 2,9 g/cm^3$ .

Per calcolare l'errore sulla densità, dobbiamo invertire la formula:

$$\frac{\partial d}{d} = E_r \Rightarrow \partial d = E_r \cdot d \Rightarrow \partial d = 0,1534 \cdot 2,9 g/cm^3$$

$$\partial d = 0,44 g/cm^3$$

Otteniamo così la misura indiretta della densità:

$$d = 2,9 \pm 0,4 g/cm^3$$